

مبرهنة :

لكن A جزءاً من المجموعة التبديلية والداخية R و B مثلية في A لنفرض أن f هي مجموعة كل الميوز البرية في A التي لا تحتوي على B و A هي مجموعة كل الميوز البرية في A/B عندئذٍ يعبر تعاقب

$$f: I \rightarrow I$$

البرهان -

نكون الثلاثة $f: I \rightarrow I$ بالبرهان التالي :

$$f(I) = I/B \quad \text{بأنه } I \in I$$

راضح أن f تحييد لأنه إذا كانت $D_1, D_2 \in I$ بحيث $D_1 = D_2$ فإنه لأجل كل عنصر $x+B \in D_1/B$ فإن

$$x \in D_1 = D_2 \Rightarrow x+B \in D_2/B \\ \Rightarrow D_1/B \subseteq D_2/B$$

لكن $D_1, D_2 \in I$ يعني $f(D_1) = f(D_2)$ عندئذٍ $D_1/B = D_2/B$

لكن $a \in D_1$ عندئذٍ

$$a+B \in D_1/B = D_2/B \Rightarrow a \in D_2$$

$$\Rightarrow D_1 \subseteq D_2$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة

لكن $k \in I$ عندئذٍ k هو جزئي في A/B وهذه هي النتيجة المطلوبة

$$k = \{a : a \in A, a+B \in k\}$$

هو جزئي في A بحيث B أي أن $k \in I$ و $k \in I$

$$f(k) = k/B = k$$

$$\begin{aligned} \text{بأن } \bar{D} \subseteq A/B \\ \Rightarrow D = D/B \end{aligned}$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة

مبرهنة : كل الميوز

لكن A, B مجموعتين من المجموعة التبديلية والداخية R نقول عند التحييد $f: A \rightarrow B$ أنه مستحيل إذا جمعت

$$(1) f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall a, b \in A$$

$$(2) f(\lambda a) = \lambda f(a) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A$$

$$(3) f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

يتبع من الترتيب مباشرة أن

$$-P. \quad f(0_A) = 0_B \quad \text{حيث } 0_A \text{ و } 0_B \text{ هي عناصر المحايد}$$

$$-C. \quad f(-a) = -f(a) \quad \forall a \in A$$

$$f(0+0) = f(0)$$

إثبات (P)

$$f(0) + f(0) = f(0)$$

$$f(0) = 0$$

نضيف $-f(0)$ للطرفين مبالغ

$$f(-a+a) = f(0) = 0 \quad (\text{باعتبار } P) \quad \text{إثبات (C)}$$

$$f(-a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow f(-a) = -f(a) \quad \text{نضيف التغير للطرفين}$$

مبرهنة:

ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة من مجموعة A إلى مجموعة B

(1) إذا كان K جزء جزئي من A فإن $f(K)$ جزء جزئي من B

(2) إذا كان $D \subset A$ جزء جزئي من A فإن $f(D) \subset B$ جزء جزئي من B

(3)

$$A \quad \text{نقطة مثالية في} \quad \ker f = \{a: a \in A, f(a) = 0\} \quad \text{حيث } 0 \text{ هو العنصر المحايد}$$

$$(4) \quad \ker f \subseteq \text{مجال } f$$

البرهان:

نلاحظ K جزء جزئي من A

$$f(K) = \{f(k) : k \in K\}$$

$$(1) \quad 0 \in f(K) \neq \emptyset$$

$$0 \in K \Rightarrow f(0) \in f(K)$$

$$\Rightarrow 0 \in f(K)$$

$$(2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad x, y \in f(k) \quad \exists a, b \in k \quad \text{حيث}$$

$$x = f(a),$$

$$y = f(b)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\alpha a + \beta b) &= f(\alpha a) + f(\beta b) \\ &= \alpha f(a) + \beta f(b) \\ &= \alpha x + \beta y \end{aligned}$$

$$\alpha x + \beta y = f(\underbrace{\alpha a + \beta b}_{\in k}) \in f(k)$$

$$x \cdot y = f(a) f(b) = f(\underbrace{a \cdot b}_{\in k}) \in f(k)$$

وهذه $f(k)$ هي جزئية من \mathbb{R}

$$f^{-1}(D) = \{a; a \in A : f(a) \in D\} \quad (2)$$

$$f^{-1}(D) \ni 0 \in f(0) = 0 \in D \quad \text{و} \quad 0 \in f^{-1}(D) \neq \emptyset$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad x, y \in f^{-1}(D) \Rightarrow f(x), f(y) \in D$$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x) + f(\beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in f^{-1}(D) \quad \text{حيث تنطبق الدالة}$$

$$f(\underbrace{x \cdot y}_{\in A}) = f(x) \cdot f(y) \in D$$

$$\Rightarrow x \cdot y \in f^{-1}(D)$$

وهذه $f^{-1}(D)$ هي جزئية من A

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in k \text{ و } f \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x) + f(\beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

$$\alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha(x) + \beta(y)$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker f$$

وهذا $\ker f$ مغلق جزئياً في A

نريد إثباتاً إضافياً

$$\forall x \in A \quad \forall y \in \ker f$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$= f(x) + 0 = f(x)$$

$$\Rightarrow x+y \in \ker f$$

نريد إثباتاً إضافياً

$$f(y \cdot x) = f(y) f(x)$$

$$= 0 \cdot f(x)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow y \cdot x \in \ker f$$

وهذا $\ker f$ مغلق كلياً في A

(٥) ملخص إثبات

توضيح

لحين A حيزاً من المثلثة R لا مثلية في A ونفرض A حيزاً

البرهان

نقول أن β مثلية في A عندها A/β حيز لثلاثية العلاقة

$$\pi: A \rightarrow A/\beta$$

$$\forall a \in A \quad \pi(a) = a + \beta$$

لنبرهن أن π تحيية

$$\forall a, b \in A \quad a = b$$

$$a + \beta = b + \beta$$

$$\pi(a) = \pi(b)$$

يجب الانتباه عند دراسة التباين π إذا كان π مثلية في A حيزاً

نبرهن أن π خطية

$$\begin{aligned}\forall a, b \in A &\Rightarrow \pi(a+b) = (a+b) + \beta \\ &= (a+\beta) + (b+\beta) \\ &= \pi(a) + \pi(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(a \cdot b) &= (a \cdot b) + \beta \\ &= (a+\beta) \cdot (b+\beta) \\ &= \pi(a) \cdot \pi(b)\end{aligned}$$

$$\forall \lambda \in R \quad a \in A$$

$$\begin{aligned}\pi(\lambda a) &= \lambda a + \beta = \lambda(a+\beta) \\ &= \lambda \pi(a)\end{aligned}$$

نبرهن أنه ثامر

$$\begin{aligned}\forall a+\beta \in A/\beta \quad a \in A \\ \Rightarrow \pi(a) = a+\beta\end{aligned}$$

$$\text{نبرهن أن } \ker \pi = \beta$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \ker \pi &\Rightarrow \pi(x) = \beta \\ \pi(x) = x + \beta &\Rightarrow x + \beta = \beta \\ &\Rightarrow x \in \beta \\ &\Rightarrow \ker \pi \subseteq \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall y \in \beta \quad y + \beta &= \beta \\ \pi(y) &= \beta \\ &\Rightarrow y \in \ker \pi \\ &\Rightarrow \beta \subseteq \ker \pi \Rightarrow \ker \pi = \beta\end{aligned}$$

تطبيقات ارستقراطية :
 لكن A, β هيا مجموعة العلاقة التبادلية والواحدة R ، $d: A \rightarrow \beta$ تطبيع فتكون
 ان d تطبيع استقراطية اذا كانت

$$\forall a, b \in A \quad \forall \lambda \in R$$

$$(1) \quad d(a+b) = d(a) + d(b)$$

$$(2) \quad d(\lambda a) = \lambda d(a)$$

$$(3) \quad d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + a \cdot d(b)$$

$$d: A \rightarrow \beta \text{ التطبيع الجبري}$$

$$I_A: A \rightarrow \beta \text{ التطبيع المحايد}$$

ينتج من التعريف مباشر ان التطبيع الجبري هو تطبيع استقراطية والرجل $A = \beta$ يات
 التطبيع المحايد $I_A: A \rightarrow A$ هو تطبيع استقراطية

مثال :

لكن A هيا مجموعة العلاقة R ، $a \in A$ عنصر العلاقة

$$d_a: A \rightarrow A$$

$$\forall x \in A : d_a(x) = ax - xa$$

هو تطبيع استقراطية في A .

البرهان :

$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in R$$

شروط التطبيع

$$x = y$$

$$ax - xa = ay - ya$$

$$\Rightarrow d_a(x) = d_a(y)$$

أي ان d_a تطبيع

لنثبت صحة الشرط

$$d_a(x+y) = a(x+y) - (x+y)a$$

$$= ax + ay - xa - ya$$

$$= ax - xa + ay - ya$$

$$= d_a(x) + d_a(y)$$

$$\begin{aligned}
 d(\lambda x) &= a(\lambda x) - (\lambda x)a \\
 &= \lambda(ax) - \lambda(xa) \\
 &= \lambda(ax - xa) \\
 &= \lambda d_a(x)
 \end{aligned}$$

$$(3) d_a(x \cdot y) = a(x \cdot y) - (x \cdot y)a$$

$$= (ax)y - x(ya) + xay - xay$$

منتهى طرف

$$= (axy - xay) + xay - xya$$

$$= (ax - xa)y + x(ay - ya)$$

$$= d_a(x)y + x d_a(y)$$

نتيجة: (نمى الاستقلى الجبر)
لكين

$f: A \rightarrow B$ شئ يجرى عنده

منه

$$\text{Im } f = f(A)$$

(1) جبر جزئى في B

(2) $\ker f$ جبر جزئى في A

ملاحظة:

$$d: A \rightarrow A \text{ تعيين استقلى في } A$$

$$\text{Im}(d) \subseteq A \text{ مودول جزئى في } A;$$

$$\ker(d) \subseteq A \text{ جبر جزئى في } A.$$

البرهان:

$$\text{Im}(d) \subseteq A \quad 0 \in \text{Im}(d) \neq \emptyset \quad (1)$$

$$\forall x, y \in \text{Im}(d) \quad \forall a, b \in A$$

$$\exists a, b \in A \quad ; \quad x = d(a)$$

$$y = d(b)$$

$$\begin{aligned} d(\alpha a + \beta b) &= d(\alpha a) + d(\beta b) \\ &= \alpha d(a) + \beta d(b) \\ &= \alpha x + \beta y \in \text{Im}(d) \end{aligned}$$

$$a \in A, x = f(a) \in f(A) = \text{Im } A$$

بما أن Δ جزئي من $\text{Im } d$ محتوي

$$\begin{aligned} 0 &\in \ker(d) \neq \emptyset \\ \forall x, y \in \ker d \quad \forall \alpha, \beta \in R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(\alpha x + \beta y) &= d(\alpha x) + d(\beta y) \\ &= \alpha d(x) + \beta d(y) \\ &= \alpha 0 + \beta 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker d \quad \Delta \text{ جزئي من } \ker d$$

$$\begin{aligned} d(xy) &= d(x)y + x d(y) \\ &= 0y + x \cdot 0 = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow xy \in \ker d$$

$$\Delta \text{ جزئي من } \ker d \subseteq$$